

Exámen de Matemáticas II Diciembre 2005

1. Dado el sistema de ecuaciones siguiente:
$$\begin{cases} ax - y + z = a \\ -x + ay + 2az = 1 \\ -x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

- Estudiar según los valores de a

$$|A| = \begin{vmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & a & 2a \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3a^2 - 1 + 2a + a - 2a^2 - 3 = a^2 + 3a - 4 = (a-1)(a+4)$$

$$a = 1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 + 1 - 2 + 3 = 5 \Rightarrow \begin{cases} r(A) = 2 \\ r(A^*) = 3 \end{cases}$$

Sistema incompatible.

$$a = -4 \rightarrow \begin{bmatrix} -4 & -1 & 1 & -4 \\ -1 & -4 & -8 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & -4 \\ -4 & -8 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 48 + 1 - 32 + 3 = 20 \Rightarrow \begin{cases} r(A) = 2 \\ r(A^*) = 3 \end{cases}$$

Sistema incompatible.

Para los demás valores el sistema es compatible determinado.

- Establecer la posición relativa de los planos según a

$$\text{Posición} \begin{cases} a \neq 1 \quad a \neq -4 & \text{Tres planos secantes en un punto} \\ a = 1 & \text{recta y plano paralelos} \\ a = -4 & \text{recta y plano paralelos} \end{cases}$$

- Resolver por Cramer para $a = -1$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{solución} \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{3+1-2+3}{3-1-2-1-2-3} = \frac{5}{-6} \\ y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-3-2+1-3}{-6} = \frac{7}{6} \\ z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{1+1+1+1}{-6} = \frac{-4}{6} \end{array} \right.$$

2. Dados los vectores $u = (-2,1,1)$, $v = (1,0,2)$, $w = (1,m,n)$.

- Calcular el valor de m y n para que sea una base ortogonal

Una base es ortogonal si sus vectores dos a dos lo son.

$$u \cdot v = -2 + 0 + 2 = 0$$

$$u \cdot w = -2 + m + n = 0$$

$$v \cdot w = 1 + 2n = 0$$

$$n = \frac{-1}{2}, \quad m = \frac{5}{2}$$

- Encontrar las coordenadas del vector $X = (1,1,1)$ en esa base.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Reuniendo la información en una matriz

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 1 & 2 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 1 & 2 & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = 2 - \frac{1}{2} - 2 - \frac{5}{2} = -3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 1 & 2 & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = \frac{-1}{2}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{-1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = -5 + 1 - \frac{1}{2} - 1 - 1 - \frac{5}{2} = -9$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 1 + 4 - 1 = 6 \rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{-1}{-3} \\ \beta = \frac{-9}{-3} = 3 \\ \delta = \frac{6}{-3} = -2 \end{cases}$$

- ¿Podrías encontrar a partir de ella una base ortonormal ?

Dividiendo cada componente de cada vector por su módulo

Módulo de $u = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6} \rightarrow \left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

Módulo de $v = \sqrt{1+0+4} = \sqrt{5} \rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

Módulo de $w = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{30}{4}} \rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{30}{4}}}, \frac{-1}{\sqrt{\frac{30}{4}}}, \frac{5}{\sqrt{\frac{30}{4}}}\right)$

3. Dada la recta r de ecuaciones $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$ y el punto $P(-1, 0, 1)$.

- Encontrar la recta perpendicular a r que la corte y pase por P .

Hallo la recta en paramétricas: $\begin{cases} x - y = 1 - \lambda \\ 2x - y = \lambda \end{cases}$ Las restamos y

$$\begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Un punto cualquiera Q de la recta será $(-1 + 2\lambda, -2 + 3\lambda, \lambda)$. Entonces $PQ = (2\lambda, -2 + 3\lambda, \lambda - 1)$. Queremos que PQ sea ortogonal a r o sea a su vector director $(2, 3, 1)$. $(2\lambda, -2 + 3\lambda, \lambda - 1) \cdot (2, 3, 1)$

$$= 4\lambda - 6 + 9\lambda + \lambda - 1 = 0 \rightarrow 14\lambda - 7 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

$PQ = (1, -1/2, -1/2)$ ---- $\rightarrow \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-1/2} = \frac{z-1}{-1/2}$ Ecuación de la recta

perpendicular que la corta en Q

$$Q=(0, -1/2, 1/2)$$

El simétrico de P respecto de r es $P^*=2(0, -1/2, 1/2)-(-1,0,1)=(1, -1, 0)$

- Hallar el punto de corte de ambas rectas.
- El punto simétrico de P respecto de r.

4.

➤ Calcular el área del triángulo determinado por los puntos

A(1,2,1), B(2,0,-1) y C(1,1,0).

$$AB = (2,0,-1) - (1,2,1) = (1,-2,-2)$$

$$AC = (1,1,0) - (1,2,1) = (0,-1,-1)$$

$$AB \Delta AC = \left(\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \right) \rightarrow (0,1,-1) \rightarrow \text{módulo} = \sqrt{2}$$

$$\text{area} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot u^2$$

➤ Calcular el rango de la matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$ según los

valores de λ .

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & \lambda \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & \lambda-1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \text{su det er min ante vale } -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = -3(\lambda-1-2-2-1-1-4\lambda+4) = -3(-4\lambda+4)$$

lo que nos dice que *discusión* $\begin{cases} \lambda \neq -1 & \text{rango} = 4 \\ \lambda = -1 & \text{rango} = 3 \end{cases}$

➤ Calcular la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{adj}(A^t) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

5. Encontrar la distancia entre las rectas r y s

$$r: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1} \quad \text{y} \quad s: \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

$$\hat{(-1,2,1)}\Delta(1,-1,1) = \left(\begin{array}{c|c|c} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array} \right) = (3 \ 2 \ -1) \rightarrow \text{modulo} = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$$

$$\begin{array}{c|c} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{array} = -2+1-2-1+1+4 = 1$$

$$\text{distancia} = \frac{1}{\sqrt{14}} \text{ unidades}$$