

OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS

El **valor absoluto** de un número entero es el número natural que resulta al prescindir del signo. Por ejemplo, el valor absoluto de -3 es 3 y el valor absoluto de $+5$ es 5 .

Para sumar números enteros del mismo signo , se suman los valores absolutos y se antepone el mismo signo que tengan los sumandos.	Para sumar números enteros de signos contrarios , se restan los valores absolutos y se antepone el signo del sumando que tenga mayor valor absoluto.	Para restar números enteros, se suma al minuendo el opuesto del sustraendo y después se aplican las reglas de la suma.
$(+2) + (+5) = +7$ $(-2) + (-5) = -7$	$(+2) + (-5) = -3$ $(-3) + (+6) = +3$	$(+2) - (-5) = (+2) + (+5) = +7$ $(-4) - (-6) = (-4) + (+6) = +2$

1) Realiza las siguientes operaciones:

- | | | |
|--------------------|---------------------|---------------------|
| a) $(+7) + (+3) =$ | d) $(-7) - (+3) =$ | g) $(+6) + (-2) =$ |
| b) $(+7) + (-3) =$ | e) $(-7) - (-3) =$ | h) $(+3) + (+13) =$ |
| c) $(+7) - (+3) =$ | f) $(+3) - (+12) =$ | i) $(+8) - (-4) =$ |

El signo $+$ delante de un paréntesis no afecta a los signos de los números contenidos en el paréntesis.	El signo $-$ delante de un paréntesis modifica los signos de los números contenidos en el paréntesis.
$+(-7) = -7$ $+(+5) = +5$	$-(+6) = -6$ $-(-4) = +4$

2) Siguiendo el ejemplo, elimina los paréntesis y calcula el resultado:

$$\boxed{(+7) + (-2) + (+4) + (-3) = 7 - 2 + 4 - 3 = (7 + 4) - (2 + 3) = 11 - 5 = 6}$$

- a) $(+7) - (-2) + (-5) - (+3) =$
 b) $(-8) - (+3) - (-6) - (-3) =$
 c) $(-14) - (-12) + (-3) + (-1) =$
 d) $(-3) + (-2) - (-6) + (+4) =$

3) Siguiendo los ejemplos, elimina los paréntesis y calcula el resultado:

$$\boxed{25 - (6 + 8) + (1 + 12) - (4 - 2) = 25 - 6 - 8 + 1 + 12 - 4 + 2 = (25 + 1 + 12 + 2) - (6 + 8 + 4) = 40 - 18 = 22}$$

$$\boxed{4 - [-6 - (12 - 3 + 2)] - (2 + 3) = 4 - [-6 - 12 + 3 - 2] - 2 - 3 = 4 + 6 + 12 - 3 + 2 - 2 - 3 =}$$

$$\boxed{= (4 + 6 + 12 + 2) - (3 + 2 + 3) = 24 - 8 = 16}$$

- a) $35 - (8 - 3 + 2 - 4) =$
 b) $(6 + 5) - (8 - 6) + (9 - 5) =$
 c) $(9 - 3 - 2) - (-3 + 2 - 6) =$
 d) $4 - [7 - (15 - 8) - (2 + 5)] =$

OPERACIONES CON FRACCIONES

<p>Una fracción es un cociente indicado entre dos números enteros, $\frac{a}{b}$, donde a es el numerador y b, el denominador (con $b \neq 0$).</p>	<p>Dos fracciones, $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, son equivalentes si se cumple que $a \cdot d = b \cdot c$.</p> <p>$\frac{2}{3}$ y $\frac{10}{15}$ son equivalentes ya que $2 \cdot 15 = 3 \cdot 10$</p>
--	--

<p>Amplificar una fracción es encontrar una fracción equivalente a ella multiplicando el numerador y el denominador por el mismo número.</p> $\frac{5}{7} = \frac{5 \cdot 4}{7 \cdot 4} = \frac{20}{28}$	<p>Simplificar una fracción es encontrar una fracción equivalente a ella dividiendo el numerador y el denominador por el mismo número.</p> $\frac{35}{21} = \frac{35 : 7}{21 : 7} = \frac{5}{3}$
---	---

<p>Si dividimos por el M.C.D. del numerador y del denominador, obtendremos una fracción que recibe el nombre de irreducible.</p>	
<p>Ejemplo: La fracción irreducible equivalente a $\frac{84}{294}$ es $\frac{2}{7}$ ya que $M.C.D.(84, 294)=42$, por tanto:</p>	$\frac{84}{294} = \frac{84 : 42}{294 : 42} = \frac{2}{7}$

<p>Una fracción es positiva si el numerador y el denominador tienen el mismo signo, y negativa si tienen signo distinto.</p>	
$\frac{+7}{+4} = \frac{-7}{-4} = \frac{7}{4}$	$\frac{-7}{4} = \frac{7}{-4} = -\frac{7}{4}$

<p>Para sumar o restar fracciones con el mismo denominador, se suman o se restan los numeradores y se deja dicho denominador.</p> $\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7} \quad \frac{3}{7} - \frac{2}{7} = \frac{1}{7}$	<p>Para sumar o restar fracciones con distinto denominador, se buscan fracciones equivalentes con denominador común (m.c.m. de los denominadores) y después se suman o se restan las fracciones obtenidas como en el caso anterior. Para sumar un número entero a una fracción, consideramos el número entero como una fracción de denominador 1.</p> $\frac{3}{2} + \frac{2}{5} - \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 10}{2 \cdot 10} + \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 4} - \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{30}{20} + \frac{8}{20} - \frac{15}{20} = \frac{30 + 8 - 15}{20} = \frac{23}{20}$ <p>En primer lugar, calculamos el m.c.m. de los denominadores: $m.c.m.(2,5,4)=20$. A continuación, vamos dividiendo el m.c.m. por el denominador de cada fracción, y el valor obtenido lo multiplicamos tanto en el numerador como en el denominador para obtener una fracción equivalente.</p>
--	---

7) Realiza las siguientes operaciones con fracciones y simplifica.

a) $\frac{8}{5} - \frac{4}{5} + \frac{1}{5} =$

b) $\frac{4}{3} - \frac{1}{5} + \frac{8}{5} =$

c) $\frac{5}{6} + \frac{7}{9} - \frac{11}{15} =$

d) $3 - \frac{5}{6} + \frac{3}{8} - \frac{7}{5} =$

e) $\frac{1}{2} - \frac{3}{4} - \frac{7}{3} =$

El **producto** de dos fracciones es otra cuyo numerador es el producto de los numeradores y cuyo denominador es el producto de los denominadores. Los números enteros se consideran fracciones de denominador 1.

$$\frac{7}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{7 \cdot 3}{4 \cdot 5} = \frac{21}{20}$$

La fracción **inversa** de $\frac{a}{b}$ es la fracción $\frac{b}{a}$.

La **división** de dos fracciones se realiza multiplicando la primera por la inversa de la segunda.

$$\frac{7}{4} : \frac{-3}{5} = \frac{7}{4} \cdot \frac{5}{-3} = -\frac{7 \cdot 5}{4 \cdot 3} = -\frac{35}{12}$$

8) Realiza las siguientes operaciones con fracciones y simplifica.

- a) $\frac{8}{3} \cdot \frac{-4}{5} =$
 b) $4 \cdot \frac{8}{5} =$
 c) $\frac{-5}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} =$
 d) $3 : \frac{8}{9} =$
 e) $\frac{1}{8} : \frac{1}{4} =$

Para calcular una **operación combinada** hay que tener en cuenta el siguiente orden de prioridad:

1.º Operaciones de los paréntesis.

2.º Multiplicaciones y divisiones.

3.º Sumas y restas.

$$\begin{aligned} \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{4}{3} - 1 \right) + \frac{3}{7} : \left(2 - \frac{1}{5} \right) &= \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{4}{3} - 1 \right) + \frac{3}{7} \cdot \left(\frac{2}{1} - \frac{1}{5} \right) = \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 3} \right) + \frac{3}{7} \cdot \left(\frac{2 \cdot 5}{1 \cdot 5} - \frac{1}{5} \right) = \\ &= \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{4-3}{3} \right) + \frac{3}{7} \cdot \left(\frac{10-1}{5} \right) = \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{3} \right) + \frac{3}{7} \cdot \left(\frac{9}{5} \right) = \frac{2 \cdot 1}{5 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 9}{7 \cdot 5} = \frac{2}{15} + \frac{27}{35} = \frac{2 \cdot 7}{15 \cdot 7} + \frac{27 \cdot 3}{35 \cdot 3} = \\ &= \frac{14}{105} + \frac{81}{105} = \frac{95}{105} = \frac{19}{21} \end{aligned}$$

Para la suma hemos tenido en cuenta que $m.c.m.(15, 63) = 105$ y para la simplificación hemos utilizado $M.C.D.(95, 105) = 5$.

9) Realiza las siguientes operaciones con fracciones y simplifica.

- a) $\frac{3}{7} \cdot \left(\frac{7}{2} - \frac{3}{2} \right) =$
 b) $\frac{2}{9} + \frac{-1}{5} \cdot \frac{-2}{3} =$
 c) $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{4} - \frac{2}{9} : \frac{1}{6} =$
 d) $\frac{-1}{2} + \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \left(4 - \frac{1}{3} \right) =$
 e) $\frac{1}{5} - \left(3 \cdot \frac{27}{81} \right) + 1 =$
 f) $\frac{1}{8} : \left[\frac{121}{4} \cdot \left(\frac{1}{6} : \frac{1}{24} \right) \right] =$

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Una expresión algebraica es un conjunto de números y letras relacionados entre sí mediante operaciones matemáticas.		El valor numérico de una expresión algebraica es el número que se obtiene al sustituir las letras por números y realizar las operaciones que se indican.	
EXPRESIÓN ESCRITA	EXPRESIÓN ALGEBRAICA	VALOR	VALOR NUMÉRICO
La suma de dos números menos dos	$x + y - 2$	$x = 2, y = 3$	$2 + 3 - 2 = 3$
El triple de un número más 5	$3x + 5$	$x = 2$	$3 \cdot 2 + 5 = 6 + 5 = 11$
La mitad de un número	$x/2$	$x = 8$	$8/2 = 4$

10) Traduce al lenguaje algebraico las siguientes frases:

- a) El doble de un número b.
- b) El doble de la suma de dos números m y n.
- c) El cuadrado de un número x más 4 unidades.
- d) El producto de tres números a, b y c
- e) El doble de un número y más 3 unidades.

Un **monomio** es una expresión algebraica formada por productos de números y letras. A los números se les denomina **coeficientes**, y a las letras con sus exponentes, **parte literal**. El **grado de un monomio** es el número que resulta de sumar todos los exponentes de su parte literal. Dos monomios son **semejantes** si tienen la misma parte literal.

11) Completa la siguiente tabla:

MONOMIO	COEFICIENTE	PARTE LITERAL	GRADO	MONOMIO SEMEJANTE
$8x^3$	8	x^3	3	$-2x^3$
$-5ab^2$				
$6x^2y^3$				
$3xyz$				
$-4a^3b$				

Para sumar o restar monomios semejantes, se suman o se restan sus coeficientes y se mantiene la misma parte literal. Si los monomios no son semejantes, se deja la operación indicada. $3xy^2 + 7xy^2 + 2x = (3 + 7)xy^2 + 2x = 10xy^2 + 2x$	Para multiplicar o dividir monomios, se multiplican o se dividen sus coeficientes por un lado y sus partes literales por otro, teniendo en cuenta las propiedades de las potencias. $7ab \cdot 4a^3b = (7 \cdot 4) \cdot (a^{1+3} \cdot b^{1+1}) = 28a^4b^2$
---	---

12) Realiza las siguientes operaciones:

- a) $2x + 5x - 4x =$
- b) $2x^2 + 5x^2 - 4x^2 =$
- c) $3x + 5y - 8x - y =$
- d) $2xy - 3y + 4x - 2xy + x =$
- e) $(2x) \cdot (-x^3) \cdot (-3x^2) =$
- f) $(-2xy) \cdot (12a^2b) =$
- g) $(24a^6) : (2a^2) =$

Un **polinomio** es la suma o resta de varios monomios. Cada uno de los sumandos se llama **término** del polinomio. El término que no tiene parte literal se llama **término independiente**. El **grado** de un polinomio es el del monomio de mayor grado.

POLINOMIO	TÉRMINOS	TÉRMINO INDEPENDIENTE	GRADO DEL POLINOMIO
$2x^3 - 3x - 1$	$2x^3; -3x; -1$	-1	3, que es el grado de $2x^3$
$-2xy + 9$	$-2xy; 9$	9	2, que es el grado de $-2xy$
$-5x$	$-5x$	No tiene	1, que es el grado de $-5x$

Para **sumar** o **restar** polinomios se suman o restan los monomios semejantes.

$$A(x) = 2x^2 + 5$$

$$B(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 3$$

$$A(x) + B(x) = (2x^2 + 5) + (x^3 - 5x^2 - 2x + 3) = x^3 - 3x^2 - 2x + 8$$

$$A(x) - B(x) = (2x^2 + 5) - (x^3 - 5x^2 - 2x + 3) = 2x^2 + 5 - x^3 + 5x^2 + 2x - 3 = -x^3 + 7x^2 + 2x + 2$$

Para calcular el **producto de dos polinomios** se multiplica cada monomio del primer polinomio por cada monomio del segundo. A continuación, se reducen los monomios semejantes.

$$A(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 1$$

$$B(x) = 2x^2 + 3x$$

$$x^3 - 5x^2 - 2x + 1$$

$$\times \quad \quad \quad 2x^2 + 3x$$

$$3x^4 - 15x^3 - 6x^2 + 3x$$

$$2x^5 - 10x^4 - 4x^3 + 2x^2$$

$$A(x) \cdot B(x) \rightarrow 2x^5 - 7x^4 - 19x^3 - 4x^2 + 3x$$

13) Dados los polinomios A(x), B(x) y C(x), efectúa las siguientes operaciones:

$$A(x) = 3x^2 - x + 6$$

$$B(x) = x^2 + 7x - 6$$

$$C(x) = -4x^2 + 2x + 5$$

- a) $A(x) + B(x) + C(x) =$
- b) $B(x) + C(x) =$
- c) $A(x) \cdot B(x) =$
- d) $A(x) - B(x) =$
- e) $[A(x) - B(x)] \cdot (x) =$

El **cuadrado de la suma** de dos términos es igual al cuadrado del primero más el doble del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(2x + 3)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot (2x) \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$$

El **cuadrado de la resta** de dos términos es igual al cuadrado del primero menos el doble del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(2x - 3)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot (2x) \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$$

El **producto de la suma de dos términos por su diferencia** es igual al cuadrado del primero menos el cuadrado del segundo.

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(2x + 3) \cdot (2x - 3) = (2x)^2 - 3^2 = 4x^2 - 9$$

14) Calcula los siguientes productos:

- a) $(x + 3)^2 =$
- b) $(3x - 2)^2 =$
- c) $(3x + 2)^2 =$
- d) $(2x + 2) \cdot (2x - 2) =$
- e) $(2x + 4)^2 =$

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas que se verifica para determinados valores de las incógnitas.

$$\underbrace{2 \cdot \overbrace{X}^{\text{incógnita}} + 1}_{\text{PRIMER MIEMBRO}} = \underbrace{\overbrace{X}^{\text{incógnita}} + 3}_{\text{SEGUNDO MIEMBRO}} \Rightarrow \underbrace{X = 1}_{\text{SOLUCIÓN}}$$

Dos ecuaciones son **equivalentes** si tienen la misma solución.

$x + 4 = 10$ y $2x = 12$ son ecuaciones equivalentes, ya que ambas tienen como solución $x = 6$.

Si a los dos miembros de una ecuación se les **suma o resta un mismo número** o expresión algebraica, se obtiene otra ecuación equivalente a la dada.

Dada la ecuación $x + 2 = 8$, restando 2 en ambos miembros $\Rightarrow x + 2 - 2 = 8 - 2 \Rightarrow x = 6$

En la práctica, lo que hacemos es pasar todos los términos independientes a un lado del igual (=) y los términos con incógnita al otro lado, teniendo en cuenta que si un término pasa de un miembro a otro de la ecuación cambia de signo.

$$7x + 3 = 6x - 47 \xrightarrow{\text{CAMBIAMOS DE MIEMBRO } 6x, 3} x - 6x = -4 - 3$$

Si a los dos miembros de una ecuación se les **multiplica o divide por un mismo número distinto de cero**, se obtiene otra ecuación equivalente a la dada.

Dada la ecuación $3x = 15$, dividiendo por 3 ambos miembros $\Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{15}{3} \Rightarrow x = 5$

En la práctica, si un término está multiplicando a un miembro de la ecuación, pasa al otro lado del igual (=) dividiendo al otro miembro. Del mismo modo, si está dividiendo, pasará multiplicando.

(En este caso no hay que cambiar los signos.)

$$3x = 18 \xrightarrow{\text{EL 3 PASA DIVIDIENDO}} x = \frac{18}{3}$$

Vamos a ver los pasos a seguir para resolver una ecuación siguiendo un ejemplo:

$$7 \cdot (1 - x) + 2x = -2 \cdot (x + 3) + 3$$

1. Eliminar los paréntesis efectuando las operaciones indicadas.

$$7 \cdot 1 - 7 \cdot x + 2x = -2 \cdot x + (-2) \cdot 3 + 3 \Rightarrow 7 - 7x + 2x = -2x - 6 + 3$$

2. Trasponer los términos, pasando todos los términos con incógnita en uno de los miembros y los términos independientes en el otro.

$$7 - 7x + 2x = -2x - 6 + 3 \Rightarrow -7x + 2x + 2x = -6 + 3 - 7$$

3. Reducir (sumar y/o restar) los términos semejantes.

$$-7x + 2x + 2x = -6 + 3 - 7 \Rightarrow -7x + 4x = -6 + 10 \Rightarrow -3x = 4$$

4. Despejar la incógnita. El valor que multiplica la incógnita (x), pasa al otro lado del igual (=) dividiendo.

$$-3x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{-3}$$

(Si es posible, se efectúa la división resultante.)

Si una ecuación contiene denominadores, se multiplican todos los términos de la ecuación por el mínimo común múltiplo de dichos denominadores y a continuación se siguen los pasos descritos en el cuadro anterior. Vamos a verlo con un ejemplo.

$$\frac{5x+7}{2} - \frac{3x+9}{4} = \frac{2x+3}{3} - 5$$

1. Calculamos el m.c.m. de los denominadores.

$$m.c.m.(2,4,3) = 12$$

2. Multiplicamos todos los miembros de la ecuación por el m.c.m. obtenido.

$$12 \cdot \frac{5x+7}{2} - 12 \cdot \frac{3x+9}{4} = 12 \cdot \frac{2x+3}{3} - 12 \cdot 5$$

3. Simplificamos, dividiendo el m.c.m. por cada uno de los denominadores, y el resultado obtenido lo multiplicamos por el numerador.

$$6 \cdot (5x+7) - 3 \cdot (3x+9) = 4 \cdot (2x+3) - 60$$

$$6 \cdot (5x+7) - 3 \cdot (3x+9) = 4 \cdot (2x+3) - 60 \Rightarrow 30x + 42 - 9x - 27 = 8x + 12 - 60 \Rightarrow 30x - 9x - 8x = 12 - 60 - 42 + 27 \Rightarrow 30x - 17x = 39 - 102 \Rightarrow 13x = -63 \Rightarrow x = -63/13$$

15) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2(x - 5) = 3(x + 1) - 3$

d) $3(x + 2) + 4(2x + 1) = 11x - 2(x + 6)$

b) $4(x - 2) + 1 = 5(x + 1) - 3x$

e) $5(x - 4) + 30 = 4(x + 6)$

c) $3(x - 3) = 5(x - 1) - 6x$

f) $5(2 - x) + 3(x + 6) = 10 - 4(6 + 2x)$

17) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x-1}{4} - \frac{12-2x}{5} = \frac{x-2}{5}$

f) $\frac{x-2}{2} + \frac{x-3}{3} + \frac{x-4}{4} = 10$

b) $\frac{3x-7}{12} - \frac{2x-3}{6} = \frac{x-1}{8}$

g) $\frac{x-4}{5} + \frac{x+3}{6} - \frac{x-6}{3} = 1 + \frac{x-7}{2}$

c) $\frac{x+4}{3} - \frac{x-4}{5} = 2 + \frac{3x-1}{15}$

h) $2\left(\frac{x}{3} + 5\right) = \frac{2x}{4} + 4$

d) $5 - \frac{x-2}{4} = 4 + \frac{x-3}{2}$

i) $\frac{x-3}{6} = 2 - \frac{5(x+3)}{12}$

e) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{6} = 30$

j) $\frac{3(x+5)}{4} + \frac{-7(x+3)}{10} = 4$